UN MONDO FANTASTICO PER LE FRAZIONI

Virginia Vaccaro
Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli"
Università "Federico II" di Napoli

"Che fortuna" pensava "trovare un posto dove si può fare attenzione a non cadere e nello stesso tempo esercitarsi a non aver paura!"
" Ronja" di A.Lindgren

Summary

This paper contains a proposal concerning the teaching of fractions. It consists of two parts. In the first one, we briefly resume the wide debate about the difficulties which underly the learning of fractions, then we specify the characteristics of our proposal, report the results of the first teaching experiments and, after some changes made in the proposal, the final results. The second part contains the details of the didactical proposal, the final results. The second part contains the details of the didactical proposal, namely a story equipped with a series of operative cards. Children discover improper fractions and equivalent fractions in a "fantastic" way, if the story is used as a first approach. If children already know these notions, they discover them again but from an other point of view and with some improvements. The protagonists of the story have to solve a difficult problem, if they want to save their heads! Children, working as they were the protagonists (and with the aid of an other character who, fortunately, knows mathematics), become aware of the necessity of knowing something about fractions in order to solve the problem.

1. Introduzione

Come è noto, il problema della didattica dei numeri razionali-frazioni è ampiamente dibattuto sia a livello nazionale che internazionale. In questi ultimi anni sono state effettuate molte indagini per avere dati concreti sugli errori e sulla loro percentuale di incidenza, per giungere poi ad una analisi precisa della situazione e delle possibili cause (Barbero et al. 1996, Bonotto 1991, 1993 e 1995, Bonotto e Basso 1994, Bove et al. 1994, solo per citarne alcune). Le conclusioni confermano le particolari difficoltà che questo argomento presenta sia dal punto di vista epistemologico che didattico.

Una delle cause è certamente legata al fatto che i numeri razionali sono suscettibili di almeno sette significati diversi: frazioni, numeri decimali, classi di equivalenza di frazioni, rapporti, operatori moltiplicativi, elementi di un campo quoziente infinito ordinato, misure o punti sulla retta numerica (vedi Kieran 1976, Hart 1985, Cannizzaro 1992). Durante gli anni della scuola elementare i bambini incontrano più volte i numeri razionali, ovviamente solo secondo alcune di queste accezioni, ma, come quando un attore sapientemente truccato diventa irriconoscibile, i bambini non riescono a riconoscerli, non riescono da soli a rendersi conto che c'è una sola astrazione matematica sottostante.

Può accadere allora che, all'uscita dalla scuola media, in un questionario proposto da Mariotti et al. (1995), gli alunni abbiano risposto che tra i tipi di numero che essi conoscono ci sono anche decimali, frazioni, razionali, facendo così pensare che per essi scritture diverse corrispondono a numeri di tipo diverso, e hanno confermato ulteriormente ciò rappresentando i vari sistemi numerici mediante insiemi disgiunti.

E' doveroso sottolineare che questo è uno degli argomenti in cui emergono maggiori incertezze anche da parte degli stessi insegnanti i quali, da un lato, sentono la necessità di approfondimenti che vanno ben oltre gli obiettivi dei programmi della scuola elementare, dall'altro hanno anche difficoltà a trovare una motivazione e un linguaggio adatto.

Un ulteriore ostacolo alla capacità di vedere le frazioni come numeri, è il fatto (certamente fondamentali), sicché nasce l’errata convinzione che la frazione è sempre minore dell’intero.

Questa situazione è aggravata dal fatto che nel frattempo si è già formato nel bambino un modello forte, rigido dei numeri naturali che, riprendendo le parole di Fishbein (1984), “...confligge duramente con le frazioni in seconda media, così come ha già fatto con i decimali alla fine della scuola elementare e all’inizio della scuola media.” Questa situazione emerge chiaramente nelle indagini sopra citate (vedi anche Resnick et al. (1989)). Ad esempio, Mariotti et al. (1995) evidenziano che, per quanto riguarda i numeri decimali, essi sono visti come due numeri naturali giustapposti, tenuti separati da una virgola, e che ciò spiegherebbe errori del tipo 3,15>3,7 perché 15>7. Mentre, nel caso delle frazioni, i soggetti, che in Barbero et al. (1996) vengono chiamati omozigoti naturali, che hanno in testa solo un modello “puro” dei naturali, commettono errori del tipo $\boxed{X}+\boxed{X}=\boxed{X}$.

Quanto fin qui esposto rappresenta solo una parte minima, ma già abbastanza significativa, di quanto si potrebbe dire sulle difficoltà dei numeri razionali-frazioni. Per ulteriori approfondimenti si rimanda agli articoli citati.

Per quanto riguarda se e come affrontare questo argomento osserviamo che ci sono proposte molto diverse tra loro sia per i contenuti, cioè cosa dire sulle frazioni, che per i metodi. Per esempio, da un lato, c’è la proposta radicale di Groff (1994), che propone di escludere completamente l’argomento frazioni dal curriculum dei primi anni di scuola, dall’altro c’è quella di Basso (1991a, 1991b, 1992), che propone sull’argomento un itinerario completo che va dalla terza alla quinta elementare.

Ebbene, nonostante l’argomento frazioni sia difficile, pensiamo, diversamente da Groff, che sia importante affrontarlo già a livello di scuola elementare. La ragione di questa scelta è legata al fatto che, attraverso questo argomento, i bambini hanno modo di conoscere entrambe le dimensioni culturali della matematica, nel senso di (Bazzini, 1992), cioè quella di strumento utile per descrivere e interpretare i fenomeni reali (frazioni proprie), e quella che consente sia di produrre nuova conoscenza matematica che di esercitare l’attività della mente umana (frazioni equivalenti, frazioni improprie), (vedi anche Sfard, 1991). Invece, Alex, 5ª elementare, scrive: “La frazione è un numero usato dai salumieri, dai macellai e dai bambini a scuola”. Ci sembra, purtroppo, non molto soddisfatto della cosa! Forse perché, tra le altre cose, gli insegnanti spesso incontrano difficoltà a trovare una motivazione diversa dalla solita torta. Per cui, se riteniamo importante affrontare questo argomento, diventa necessario cercare di fare qualcosa affinché Alex, e tanti altri bambini, modifichino la loro opinione. A tal proposito D’Amore, (1993, pag.132), propone: “...che cosa di meglio fare, per introdurre l’idea di frazione, se non collocarla all’interno di una situazione problematica?”. A questa affermazione suggeriamo di aggiungere la parola “fantastica”: “...situazione problematica fantastica”. Tale scelta, come vedremo, da un lato apre le porte di un mondo dalle risorse inesauribili, dall’altro può aiutare a creare una situazione di apprendimento che tenga conto del soggetto che apprende, delle sue caratteristiche, delle sue paure e che riesca a far sparire queste ultime per far posto ad una dinamica costruttiva che aiuti a superare gli ostacoli.

Infatti, ai già citati problemi riguardanti le frazioni, vanno ad aggiungersi quelli, ben noti, descritti dalle parole della Castelnuovo, (1963, pag.1),: ”... la lezione di matematica riesce in generale noiosa, pesante, spesso difficile. Certi concetti non vengono afferrati benché il professore si affanni a ripeterli e cerchi di chiarirli con numerose applicazioni, di alcune proprietà non si capisce addirittura il senso. E’ nota << l’incomprensione per la matematica>>....E’ nota anche <<la paura per la matematica>>...”.

Le recenti indagini, di cui abbiamo riportato in sintesi alcune considerazioni, confermano, ad esempio, che c’è ancora una certa difficoltà ad afferrare i concetti riguardanti le frazioni nonostante vengano più volte ripresi. Mentre, purtroppo, non sono necessarie indagini per scoprire che esiste ancora “la paura” della matematica. Questo nonostante tante cose siano cambiate nella didattica della matematica.

la prima volta, si riconosce un ruolo formativo all'educazione matematica e ciò si evince dai nuovi contenuti non finalizzati solo alla necessità di "far di conto". Contemporaneamente si afferma che: "... le nozioni matematiche di base vanno fondate e costruite partendo da situazioni problematiche concrete, che scaturiscano da esperienze reali del fanciullo...". Si richiede quindi all'insegnante, al ricercatore, di porre al centro della sua attenzione non solo l'argomento da trattare, ma anche, l'allievo stesso. Infatti l'apprendimento a quest'età, e forse ad ogni età, non avviene per un atto di volontà o per senso del dovere. Atti che inoltre sembrano servire ben poco per la conoscenza matematica, per la quale si legge sempre più, che diventa fruibile solo se il bambino la scopre, la costruisce o la crea personalmente. La conoscenza matematica richiede che l'allievo in classe sia presente, attivo, interessato. Quindi è fondamentale cercare di ottenere la sua partecipazione. A tale scopo possono essere utili esperienze con casi particolari (o fantastiche, come abbiamo sopra detto), non descrizioni o definizioni astratte del concetto oggetto di studio. In quest'ultimo caso l'insegnante si comporterebbe come quegli adulti che ritengono educativamente utile dare ai bambini informazioni "reali" della visione del mondo, frutto di un lungo e personale processo di maturazione, dimenticando che tali informazioni, come è noto, in quanto tali, sono del tutto inutili perché estranee al modo in cui i bambini percepiscono il mondo, mentre, purtroppo, la loro imposizione crea ansia e frustrazione.

2. Una fiaba per le frazioni

Come entrare nel mondo delle esperienze del bambino? Come creare in lui una motivazione? E, quando ciò è difficile, come creare per lui situazioni particolari, significative, interessanti, attraenti? Si può a tale scopo contare su uno dei mezzi più collaudati e sicuri per quanto concerne i risultati e il piacere che ne deriva al bambino: la **fiaba**. Infatti non bisogna dimenticare che il modo infantile di vivere i rapporti con il reale, fermo restando il principio del rispetto della individualità di ciascun bambino, è, in massima parte, magico. Secondo Dallari (1973), la magia infantile non rappresenta "un" aspetto del comportamento del bambino ma piuttosto ne costituisce l'atmosfera esistenziale. Pensiamo quindi che rispetto al problema di costruire "...situazioni problematiche concrete, che scaturiscano da esperienze reali del fanciullo...", "reale" non è in contrapposizione con "fantastico" ma con "astratto", cioè con l'uso di formalismi e definizioni lontani dal bambino.

Concordiamo quindi con Rodari, (1973, pag.178), quando scrive: "Le fiabe servono alla matematica come la matematica serve alle fiabe. Servono alla poesia, alla musica, all'utopia, all'impegno politico: insomma all'uomo intero, e non solo al fantasticatore. Servono proprio perché, in apparenza, non servono a niente: come la poesia e la musica, come il teatro o lo sport...". Nello stesso libro Rodari afferma che la fiaba può darci delle chiavi per entrare nella realtà per strade nuove, può aiutare il bambino a conoscere il mondo, diventa il mezzo per parlare col bambino anche piccolissimo, di tante cose su cui un discorso diretto sarebbe improponibile. Ma anche più di recente si legge che, anche se è vero che, in molti casi, situazioni problematiche più vicine alla realtà aiutano a recuperare bambini culturalmente o emotivamente più deboli, in molti altri casi si è "rivelata efficace e liberatoria una situazione problematica fittizia, sulla cui creazione fantastica, c'era un accordo", (D'Amore 1993, pag.65), e tali situazioni fittizie inerenti il loro mondo fantastico, aggiungiamo, sono vissute in modo molto "concreto" e "reale" dai bambini, (si ha "testimonianza...dell'esigenza di estraniamento dalla realtà...", (ib., pag.121)).

La dimensione fiabesca può essere un valido strumento educativo. Attraverso la fiaba possiamo offrire al bambino occasioni per conoscere e controllare le sue ansie ed emozioni, per stimolare la sua fantasia e il suo intelletto. Occasioni che diventino per lui esperienze positive, che lo rendano tranquillo rispetto a ciò che sta costruendo. Negare ciò, privilegiando un approccio unicamente di tipo scientifico è un'operazione limitante, così come lo sarebbe il contrario. La scuola dovrebbe essere un luogo in cui ogni bambino dovrebbe pensare: "Che fortuna, trovare un posto dove si può imparare e nello stesso tempo esercitarsi a non aver paura!" (parafrasando il personaggio di un libro per bambini scritto da Lindgren (1994, pag.16)).

La situazione problematica fantastica con la quale affrontare le frazioni e, mediante la quale, creare una situazione di apprendimento che tenga conto del soggetto che apprende, delle sue caratteristiche, delle sue paure, è una fiaba, ma con qualcosa in più, è una "fiaba interattiva":

-"fiaba" perché è un racconto fantastico, (vedi Propp, 1946), in cui i due protagonisti, un falegname e un muratore, riescono a superare una prova, imposta da una regina prepotente e permalosa, grazie ad un mezzo "magico" fornito da un aiutante, l'astronomo - matematico di corte. Queste sono le funzioni più ricorrenti tra quelle che Propp, (1977), individua nella fiaba: il **protagonista** o il **buono**, colui che vince, l'eroe che deve affrontare delle prove prima di giungere alla vittoria ed ottenere il premio; l'**antagonista** o il **cattivo**; l'**aiutante** che fornisce il mezzo magico al protagonista per vincere.

-"interattiva" perché è accompagnata da 18 schede operative, appositamente predisposte, che richiedono interventi di coloritura, di costruzione di sagome, di completamento. Il racconto viene interrotto, in vari punti, da rimandi ad alcune schede numerate che richiedono interventi operativi da parte degli alunni. Le schede, per comodità e per non interrompere eccessivamente il racconto, sono tutte raccolte alla fine; le interruzioni fanno sì che il racconto si presti ad essere letto a puntate. Questo lavoro, se usato come primo approccio, consente ai bambini di scoprire le frazioni improprie e le frazioni equivalenti, o, se l'argomento frazioni è già stato trattato, di riscoprirle con una metodologia diversa. Le schede di lavoro e il racconto stesso, costituiscono per l'allievo uno strumento di auto - controllo circa il lavoro fatto (vedi in particolare le schede 9, 10, 11 e 12).

3. Scelte contenutistiche e metodologiche

Il lavoro proposto è un percorso nel quale l'obiettivo "frazioni equivalenti" rappresenta una tappa fondamentale rispetto ad un traguardo non previsto nella scuola elementare. Il traguardo è rappresentato dall'obiettivo "operazioni di addizione e sottrazione di frazioni con denominatori differenti", nei riguardi del quale, gli alunni della scuola media, e oltre, come evidenziato dall'esempio nell'introduzione, mostrano profonde incertezze. Tuttavia, riteniamo importante cominciare fin dalla scuola elementare a creare le premesse affinché i risultati di tali operazioni non siano, nel migliore dei casi, ottenuti meccanicamente, ma siano frutto di passaggi significativi di cui l'alunno ha consapevolezza. Quindi, anche se questo traguardo non viene dichiarato apertamente, è necessario tenerne conto per poter comprendere il contenuto della proposta.

La proposta riprende in parte la storia dei numeri razionali. Infatti, così come i numeri interi nascono come astrazione del processo di contare insiemi finiti di oggetti, così i numeri razionali nascono per rispondere all'esigenza di misurare delle quantità, come lunghezze, aree, ecc.ecc. Come è noto, "...Il primo passo è quello di ridurre il problema di misurare al problema di contare...In matematica...un'unità di ordine inferiore ottenuta suddividendo l'unità originaria in *n* parti uguali si indica col simbolo $\frac{1}{n}$; e se una data quantità contiene esattamente *m* di queste unità di ordine inferiore, la sua misura si indica con il simbolo $\frac{m}{n}$.....dopo secoli di tentativi casuali: il simbolo $\frac{m}{n}$ fu spogliato del suo riferimento concreto al procedimento di misurare e alle grandezze misurate e fu invece considerato come un *numero* puro...(Courant e Robbins, 1995, pag.104). Questa è l'idea. Le unità frazionarie, quindi, e il significato delle parole numeratore e denominatore faranno da guida lungo il percorso.

Per quanto riguarda il numeratore e il denominatore, è importante che il bambino comprenda il ruolo diverso che essi hanno, così come è indicato dai nomi scelti per distinguerli, se si vuole che possa bene operare con le frazioni utilizzando in modo appropriato il modello dei naturali.

Il significato del nome denominatore pensiamo che venga meglio compreso se si delle operazioni necessarie per costruire le frazioni, faciliti anche l'acquisizione del simbolo di frazione il quale viene introdotto come somma di unità frazionarie.

Inoltre, dal momento che questo modo di introdurre le frazioni svincola il numeratore dal dover essere minore del denominatore, viene ad essere favorita l'introduzione delle frazioni improprie e si realizza il significato di numeratore come parte che serve per contare.

Riteniamo infine che l'uso delle unità frazionarie alla stessa stregua di unità di misura, mentre contribuisce a rendere più chiaro il fatto che il denominatore è un nome, consente un trasferimento di informazioni dall'ambito geometrico, dove si impara a passare da una misura espressa in una data unità ad un'altra ad essa equivalente, a quello aritmetico, facilitando così nel bambino la comprensione del fatto che, se si vogliono confrontare, addizionare o sottrarre frazioni con denominatori differenti, bisogna prima costruire frazioni, con eguale denominatore, equivalenti alle frazioni date e poi operare con queste ultime.

Ricordiamo che tra gli obiettivi del 1° ciclo c'è quello di saper confrontare e misurare lunghezze, estensioni, capacità, durate temporali, usando opportune unità, *arbitrarie* o convenzionali, e loro successive suddivisioni. Si possono, quindi, utilizzare come unità di misura arbitrarie anche le unità frazionarie, mettendo in evidenza le informazioni intuitive di relazione tra quantità che attraverso queste si ottengono, senza conoscere la misura dell'oggetto considerato mediante unità di misura convenzionali. Facciamo un esempio per chiarire quanto detto. L'esempio è preso da uno dei giornalini più letti dai bambini, "Topolino". In un inserto dal titolo "Che musica maestro", ci sono le istruzioni per costruire uno strumento musicale che funziona come un trombone. Servono: una cannuccia, acqua, una bottiglia. Le istruzioni sono: 1) riempite d'acqua la bottiglia fino a $\frac{3}{4}$ della sua capienza; 2) infilate la cannuccia nella bottiglia e soffiate orizzontalmente sulla sua estremità; 3) abbassate la bottiglia tenendo ferma la cannuccia, continuate a soffiare. Le istruzioni non dipendono dalla bottiglia che si prende, ma solo dal rapporto tra la parte piena d'acqua e quella vuota e la frazione $\frac{3}{4}$ assolve a questo compito. Vi sono molti esempi di questo tipo e potrebbero essere utilizzati.

4. Sperimentazione

La sperimentazione è stata caratterizzata da tre fasi.

1ª fase. La prima fase ha avuto inizio alla fine dell'anno scolastico 95/96. La prima versione di questo progetto è stata sperimentata in otto classi del 2° ciclo delle scuole elementari della provincia di Napoli e di Caserta. Essa conteneva 14 schede operative. Dal momento che, l'approccio alle frazioni risultava essere diverso da quello solitamente usato dagli insegnanti, sia per il modo che per i contenuti scelti, si voleva valutare l'impatto della proposta sia in una terza che in una quarta, dove poteva essere usata come primo approccio alle frazioni equivalenti, che in quinta dove poteva essere utilizzata sia come verifica di quanto già proposto che come integrazione. Ovviamente le sperimentazioni sono state caratterizzate da tempi, modi e risultati diversi. Per quanto riguarda la classe terza , è stato necessario l'intervento dell'insegnante in fase di lettura, solo le prime 8 schede sono state affrontate individualmente, per le schede 9,10,11, e 12 si sono formati gruppi che operavano rispettivamente come il falegname o il muratore, per le ultime due schede è stato necessario un lavoro collettivo. E' risultato evidente che il racconto e le richieste della Regina dovevano essere più semplici per consentire agli alunni di svolgere da soli il lavoro di lettura e di risoluzione delle richieste delle schede. Nella classe quinta, a fine anno scolastico, il lavoro si è rivelato un valido strumento di verifica e di consolidamento delle abilità e delle competenze acquisite per la maggior parte degli alunni. La classe quarta, è risultata quella più adatta al lavoro così come era proposto. La sperimentazione ha messo inoltre in evidenza alcune difficoltà: l'uso di parole non molto comuni, parti descrittive che appesantivano il racconto senza aggiungere alcunché, alcune consegne non del tutto chiare.

2ª fase. Questa fase ha visto la mia partecipazione, all'inizio dell'anno scolastico 96/97, alla sperimentazione in una classe quarta. Questa interessante esperienza ha fatto sì che mi rendessi personalmente conto non solo delle difficoltà sopra menzionate ma anche della necessità di modificare la scheda 13, riducendo le richieste in essa contenute, inserendo queste, più altre ancora, in nuove schede operative ed ottenere così una maggiore segmentazione rispetto all'obiettivo prefissato. Dopo questa esperienza, sono state eliminate o modificate le parti descrittive che appesantivano il racconto, sono state chiarite alcune consegne, la scheda 13 è stata ridimensionata, sono state predisposte le schede 14, 15, 16, 17, essendo la 18 la scheda 14 della proposta iniziale. Per quanto riguarda le parole di uso non comune, si è deciso di seguire la proposta di molti bambini di non eliminarle perché essi avevano colto nel lavoro anche gli aspetti linguistici e quindi di interdisciplinarità con la lingua italiana.

Una volta apportate le modifiche necessarie, si è dato il via alla terza fase di questa sperimentazione e il lavoro è stato proposto in due classi quarte, della stessa insegnante, nel periodo febbraio-marzo dello stesso anno.

3ª fase. Nelle classi quarte, il discorso sulle frazioni era già stato avviato partendo da una fase manipolativa-concreta: attività di taglio, di piegatura, di coloritura di fogli. I bambini avevano già lavorato sia alla costruzione di alcune unità frazionarie come operatori su grandezze continue e discrete, che con alcune frazioni con numeratore diverso dall'unità.

Il testo della fiaba è stato letto dall'insegnante per i primi due paragrafi, cioè per quella parte che richiede l'intervento operativo sulle schede 2,3,4,5,6, principalmente per valutare l'impatto della fiaba sugli alunni e per verificare eventuali difficoltà di comprensione del testo. Alla fine della lettura, dopo che gli alunni hanno scambiato alcune divertenti osservazioni sulla Regina di Cuori, con la quale avevano fatto conoscenza nella scheda 1, sono stati richiamati gli argomenti a cui il testo faceva riferimento quali unità di misura, confrontare, e chiarito espressioni del tipo "metro di misura". Nella stessa fase sono state proposte agli alunni le schede relative. Il lavoro è stato individuale e la correzione collettiva. Durante l'esecuzione del lavoro, l'insegnante ha mantenuto il ruolo di osservatore, segnando eventuali difficoltà o errori. Sono stati necessari due incontri.

Dal momento che gli alunni hanno mostrato di gradire la storia e i personaggi ed erano motivati a continuare il lavoro, si è proseguiti nella lettura non più guidata e senza interventi importanti da parte dell'insegnante. I paragrafi restanti, che includono come interventi operativi le schede dalla 7 alla 18, hanno richiesto tre settimane di lavoro per un totale di cinque incontri per ogni classe.

In una classe, gli alunni hanno lavorato individualmente con la libertà di confrontarsi con i compagni, nell'altra, per le schede 9, 10, 11 e 12, sono stati divisi in gruppi di al più quattro bambini. Ogni gruppo ha svolto o il lavoro del falegname o quello del muratore. I risultati trovati, le finestre e i vani disegnati (a volte con paesaggi o la regina stessa come sfondo), sono stati confrontati da gruppi contrapposti alla presenza di una compagna scelta, di volta in volta, ad impersonare la regina. La drammatizzazione ha determinato un ulteriore incremento di entusiasmo e una maggiore volontà di scoperta e risoluzione del problema.

Nella scheda 13 i bambini, seguendo l'indicazione di fare come il falegname per provare che le frazioni date sono equivalenti, hanno scritto:

$$\frac{23}{9}=\frac{1}{9}\text{ x } 23=\frac{3}{27}\text{ x } 23=\frac{63}{27}$$

$$\frac{4}{9}=\frac{1}{9}\text{ x } 4=\frac{3}{27}\text{ x } 4=\frac{12}{27}$$

Il lungo lavoro sulla stessa sagoma con i continui confronti tra le sue parti fa sì che i bambini non incontrino eccessive difficoltà a rispondere alle richieste delle schede 14 e 15.

Nella scheda 16 rappresentano le unità frazionarie, le possono confrontare, si liberano della sagoma.

Il lavoro di queste ultime tre schede da modo agli alunni di maturare il passaggio richiesto nella scheda 17.

Le risposte alla scheda 18, in cui si chiede di descrivere in modo spontaneo come si può ottenere una frazione equivalente ad una data frazione, sono state molto varie. Simona scrive: ”Sono equivalenti le frazioni che pur non avendo gli stessi numeri indicano la stessa quantità”. Claudio scrive: “Il segreto è che due frazioni sono equivalenti quando una è multipla dell’altra”. Maria scrive: “Se prendo una frazione e moltiplico per lo stesso numero numeratore e denominatore il valore è lo stesso, penso che va bene anche se divido”.

L’insegnante ha assunto un atteggiamento di ascolto attivo, stimolando all’osservazione ed alla riflessione gli alunni dubbiosi, senza fornire spiegazioni dall’alto.

Ovviamente, in entrambe le classi, c’erano sia bambini con particolari difficoltà di apprendimento ed inserimento, che bambini con difficoltà maggiori in matematica rispetto alle altre materie. Questi, si sa, sono quelli che durante le lezioni o sono assenti o disturbano il lavoro della classe. L’insegnante ha sottolineato che, anche se per la maggior parte di questi i risultati sono stati insoddisfacenti, la proposta ha favorito l’insorgere in alcuni di un impegno personale ed una partecipazione insolita ponendo così le basi per un miglior rapporto alunno-docente e alunno-compagni. Nei casi in cui questi bambini particolari erano inseriti in un gruppo di lavoro, è accaduto che la “passionalità”, (termine usato dall’insegnante), con cui i compagni più capaci lavoravano ha contagiato alcuni di questi.

5. Osservazioni e considerazioni critiche.

La proposta è risultata un modo divertente di lavorare che coinvolge molto i bambini creando entusiasmo operativo e curiosità. I bambini riconoscono nella regina il personaggio prepotente della versione cinematografica del celebre libro di L. Carroll "Alice nel paese delle meraviglie". La costruzione di tale lavoro su un personaggio noto ha, senza dubbio, permesso ai bambini di affrontare il compito partendo da una posizione di vantaggio, in quanto veniva a ridursi l'ansia del "non conosciuto", e di identificarsi con i personaggi, con i quali si sentono solidali e di cui sentono il problema come "loro" problema.

Come abbiamo già detto, sarebbe limitante scegliere solo una metodologia per affrontare un qualunque argomento. Certamente ogni percorso va affiancato da altro lavoro sia per non creare uno stereotipo che ostacoli la comprensione generale di un concetto, sia perché i bambini abbiano a disposizione tutto il materiale utile per raggiungere la piena consapevolezza di quanto stanno facendo.

Le schede operative, dal momento che richiedono l'esplicitazione di ciò che di volta in volta si sta facendo, contribuiscono a rendere gli alunni consapevoli delle procedure in atto, favorendo un adeguato controllo/verifica delle proprie esecuzioni.

Le discussioni sorte intorno alle varie possibilità di risoluzione delle richieste delle schede, mentre hanno contribuito a consolidare la consuetudine alla verbalizzazione in ambito matematico, hanno favorito confronti tra gli alunni e spostamenti anche in altri ambiti disciplinari. Un esempio di ciò si è avuto quando bisognava capire quanto fosse alta l’attaccatura tra il braccio e il corpo della regina. Affinché si convincessero del fatto che questa è in corrispondenza con il segno del giro manica che compare sulla parte anteriore dell’abito, è stato necessario chiedere ad ognuno di valutare l’altezza dell’attaccatura del proprio braccio al proprio corpo. Si sono resi allora conto che l’altezza di questa parte è ben più piccola rispetto all’altezza del busto. Nella regina è ancora un po’ più piccola, ma tanto lei è tutta sproporzionata! Qualcuno ha allora proposto di disegnare la regina con il braccio alzato per rendere più evidente questo fatto. Ma altri hanno risposto che, visto che le richieste sono relative alla regina con il braccio alzato, l’esercizio diventerebbe troppo semplice. La costruzione della sagoma mediante i fermacampione, come richiesto nella scheda 6, non solo ha suscitato entusiasmo, ma è stata poi utilissima, aiutando i bambini a determinare le risposte alle richieste delle schede successive.

La proposta ha favorito la scoperta autonoma della definizione-regola per la costruzione di frazioni equivalenti.

L'astronomo-matematico di corte, nel corso del racconto, richiede un'attimo di attenzione particolare nel momento in cui stabilisce sia un linguaggio che un simbolismo adeguati all'argomento, spostando così l'attenzione dei bambini dal problema pratico all'ambito più specifico della matematica.

Inoltre, sempre con l'astronomo-matematico di corte, i bambini hanno lavorato per trasformare le informazioni date dalla manipolazione in relazioni tra i dati numerici.

Per quanto riguarda la possibilità di realizzare attività interdisciplinari, pensiamo ad attività riguardanti, ad esempio, la comprensione del testo ed analisi linguistiche in eventuali ore di compresenza con l'insegnante di lingua italiana. Ma non solo. Ripensando alle domande poste dai bambini: "Perché una storia? Perché il Paese delle meraviglie? Quale altro luogo avremmo potuto utilizzare? Andrebbe bene anche Robinson Crusoe che non ha più nulla? Possiamo provare anche noi a scrivere una storia?". La risposta affermativa a quest'ultima domanda impegna l'alunno in una attività di elaborazione di un testo scritto circa una situazione problematica coerente con i dati matematici coinvolti. Ad esempio possono scrivere una piccola storia che giustifichi l'ingresso delle nuove unità frazionarie nelle schede 14, 15. Questa è un'attività utile sia dal punto di vista della lingua che da quello matematico.

L'atmosfera è stata serena e accattivante, non ha permesso, ad alcuni di quelli che sono soliti farlo, di alzare le proprie difese, li ha colti di sorpresa: "Maestra ma stiamo facendo matematica?". La lezione di matematica non è risultata noiosa, la paura per la matematica sembra essere rimasta fuori dall'aula e c'è stata una motivazione, anche se fantastica, a che si usino le frazioni. Dalle interviste fatte a fine lavoro sono emerse molte risposte interessanti. Ne riportiamo due. Domenico, che non riusciva a mettere a fuoco ciò che voleva esprimere, cercava le parole adatte, ha detto: "E' stato bello poter lavorare in matematica utilizzando ciò che a me piace fare di più: leggere storie e disegnare." Francesco: "Maestra, tu lo sai, a me piace riflettere sulle cose e facendo questo lavoro ho avuto modo di parlare e mettermi d'accordo con Antonello (bambino che Francesco stima molto)."

E le operazioni con le frazioni?

Come abbiamo già detto, tra i nostri obiettivi c'era anche quello delle operazioni di addizione e sottrazione tra frazioni con denominatori differenti. Abbiamo voluto fare una verificare, a questo riguardo, proponendo ad allievi particolarmente interessati, desiderosi di continuare a cimentarsi, una scheda aggiuntiva, denominata l'AZZARDO. In questa scheda si chiedeva di calcolare la somma di due frazioni con denominatori differenti avendo come unici esempi di riferimento, le somme di alcune misure di lunghezza espresse mediante unità di misura differenti. L'attesa era che riuscissero a porsi almeno il problema che, come per gli esempi proposti, qualcosa andava fatto prima di poter dare il risultato. Per questi ragazzi l'attesa è stata soddisfatta e, senza suggerimenti ma solo dando assensi ai loro ragionamenti, hanno trovato le somme richieste. Questo, con loro grande soddisfazione, in quanto sapevano che avrebbero affrontato tale questione alla scuola media.

Progetti

I risultati, la partecipazione e i consensi ricevuti ci spingono a continuare a sperimentare l'uso della fiaba come strumento didattico sia per quanto riguarda l'argomento frazioni che per altri obiettivi della scuola elementare. Con alcune insegnanti del nucleo stiamo lavorando alla possibilità di affrontare con la fiaba altri punti particolarmente delicati per il bambino nel 1° ciclo, mentre con altre stiamo preparando una versione più semplice della proposta attuale che possa essere utilizzata per il raggiungimento degli obiettivi relativi all'argomento frazioni in terza elementare. Inoltre vogliamo continuare ad esplorare il mondo delle frazioni, scrivendo altri episodi che vadano ad aggiungersi a quello già utilizzato. In particolare si vuole approfondire il discorso sulle unità frazionarie con denominatore un numero

Collaboratori

Perché l'idea divenisse progetto è stata fondamentale la collaborazione delle insegnanti del N.R.D. di Napoli con le loro classi, le classi di loro colleghe, i loro consigli e il loro entusiasmo; sono stati importanti l'incoraggiamento e i consigli che il prof. R. Tortora costantemente ha dato durante gli incontri del nucleo. A lui e alle insegnanti F. Boccini, D. Bove, V. Camardella, A. Fenderico, M. Menditto, M. Menna, L. Savoia, va il mio ringraziamento.

Bibliografia

BARBERO, R.,CARIGNANO, I., MAGNANI, R., TREMOLOSO,G.: 1996, "Una ricerca sulle frazioni", *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *19B*, 351-376.

BASSO, M.: 1991a, "Un possibile itinerario didattico sulle frazioni nella scuola elementare: Classe III", *L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 14 (7)*,678-698.

BASSO, M.: 1991b, "Un possibile itinerario didattico sulle frazioni nella scuola elementare: Classe IV", *L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate,*14 (9),877-897.

BASSO, M.: 1992, "Un possibile itinerario didattico sulle frazioni nella scuola elementare: Classe V", *L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate,*15 (1), 73-96.

BAZZINI, L.:1992, "Cultural Choices and teaching implications in primary mathematics education", in L. Bazzini and H.G. Steiner (eds), Proc. *Second Italian-German Bilateral Symposium on Didactics of Mathematics*, Haus Ohrbeck.

BONOTTO, C.: 1991, Numeri razionali. Approcci diversi e relative sperimentazioni didattiche, *L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 14 (7), 607-638.

BONOTTO, C.: 1992, "Uno studio sul concetto di numero decimale e di numero razionale", *L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 15 (5), 415-448.

BONOTTO, C.: 1993, "Origini concettuali di errori che si riscontrano nel confrontare numeri decimali e frazioni", *L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 16 (1), 9-45.

BONOTTO, C., BASSO, M.: 1994, "Analisi di indagini sui numeri decimali rivolte ad allievi ed insegnanti della scuola dell'obbligo", in Basso, M. et al.(eds), *Numeri e proprietà*, Università di Parma, 93-98.

BONOTTO, C.: 1995, "Sull'integrazione delle strutture numeriche nella scuola dell'obbligo", *L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 18A (4),.

BONOTTO, C.: 1996, "Sul modo di affrontare i numeri decimali nella scuola dell'obbligo", *L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 19A (2).

BOVE, D., CAMARDELLA, V., COPPOLA, B., DELLA VECCHIA, M., FENDERICO, A., FERRERO, C., GALLETTI, L., MENDITTO, M., MORELLI, A., NARDUCCI, R., NELLI, D., SAVOIA,L. e TORTORA, R.: 1994, "Indagine sulla conoscenza e le competenze al passaggio dalla Scuola Elementare alla Media. Proposte di interventi", in Basso, M. et al.(eds), *Numeri e proprietà,* Università di Parma,87-92.

CANNIZZARO, L.: 1992, "La prima educazione matematica nel settore aritmetico", *L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 15 (3), 235-252.

CASTELNUOVO, E.: 1963, " Didattica della matematica", La Nuova Italia Editrice.

COURANT,R., ROBBINS, H.: 1995, "Che cos'è la matematica?", Universale Bollati Boringhieri,

DALLARI, M.: 1980, " La fata intenzionale. Per una pedagogia della fiaba e della controfiaba", La Nuova Italia, Firenze.

D'AMORE, B.: 1993, "Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving", Angeli, Milano.

FISCHBEIN, E.: 1984, " Concreto e astratto nell'insegnamento della matematica elementare", in Prodi, G. (a cura di), *Processi cognitivi e apprendimento della matematica nella scuola elementare*, L Scuola, Brescia.

GROFF, P.: 1994, "The future of fractions", *Int. Journal of Math. Education in Science and Technology*, vol.25, n°4.

HART, K.: 1985, " Le frazioni sono difficili", in Artusi Chini (a cura di), *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Zanichelli, Bologna.

HART, K.: 1989, "Fractions: Equivalence and Addition", in *Children's Mathematical frameworks 8-13: A study of classroom teaching* ,D.C.Johnson.

KIERAN, T.E.: 1976, "On the Mathematical Cognitive and Istructional Foundations of Rational Number, Number and Measurement", University of Georgia Research Workshop,

MARIOTTI,M.A.,- SAINATI NELLO, M., SCIOLIS MARINO, M.: 1995. “Con quale idea di numero i ragazzi escono dalla scuola media?”, *L’Insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 18A-18B (5).
PROPP,V.: 1946, “Le radici storiche dei racconti di fate”, Boringhieri, Torino.
PROPP, V.: 1977, “ Morfologia della fiaba”, Einaudi, Torino.
RESNICK, L.B.,NESHER, P.,LEONARD, F.,MAGONE, M.,OMANSON, S., PELED, I.: 1989, “Conceptual bases of arithmetic errors: the case of decimal fractions”, *Journal for Research in Mathematics Education*, vol.20, n.1.
RODARI, G.: 1973, “Grammatica della fantasia”, Einaudi Ragazzi.
SFARD, A.: 1991, “On the dual nature of Mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin”, *Educational Studies in Mathematics*, 22.
STREEFLAND, L.: 1991, “Fractions in realistic mathematics education”, Kluwer Academic Publishers.

5. Appendice

La fiaba e le schede qui riportate non presentano alcuna differenza rispetto al lavoro originale se non nell’impaginazione e nel carattere: il carattere qui è molto più piccolo e non c’è più alcuna interruzione sia nel racconto, quando si richiedono interventi operativi attraverso l’inserimento di schede, che tra le schede stesse.

<<TAGLIATELE LA TESTA.......>>

Nel Paese delle Meraviglie vive la Regina di Cuori. La ricordate? Brutta, grassa e un po'...... bassotta, oltre che vanitosa, prepotente e molto.....intonata. Chi può, in tutta sincerità, affermare di non aver mai udito il suo ormai famoso: <<Tagliatele la testaaaaa.....!!>>?. Ella non ha dubbi. Ogniqualvolta si presenta un problema, questa è la soluzione.

Dovete sapere che un tempo la vita a palazzo si svolgeva serena, ed i problemi si risolvevano con giustizia. Il Re e la Regina usavano lo stesso metro di misura per tutti. Metro di misura: le ultime parole famose !!!.

La salita al trono della Regina di Cuori sconvolse l’equilibrio del piccolo regno. Misurare, confrontare, giudicare erano parole il cui significato dipendeva dalla Regina. Tutto ciò che fino ad allora era stato fatto in base a delle scelte uguali per tutti, per quelli alti e per quelli bassi, quelli larghi e quelli stretti, ora non andava più bene. Le sedie, i tavoli, i letti, gli scalini, i davanzali delle finestre, le mensole, gli, specchi, le porte ecc. ecc. tutto era troppo alto o troppo stretto. Tutto era sbagliato.

Questi problemi, in generale, rispetto a quelli della giustizia sono meno importanti, in generale........ Ma provate a chiederlo ai falegnami, ai muratori, alle sarte, ai cuochi, ai giardinieri e a tutti quelli che allora lavoravano a Palazzo.

Ogni errore, lo sapete bene, era punito con il taglio della testa.

(SCHEDA 1: FACCIAMO CONOSCENZA CON LA REGINA DI CUORI)

Se avessimo fatto conoscenza solo con la regina avremmo potuto osservare che forse la natura non le aveva dato un fisico da indossatrice, ma quella sedia ci fa purtroppo capire che il problema non era solo di curve ma anche di altezza !! Non solo non riusciva a sedersi, ma tutte quelle cose così alte offendevano la sua regale Maestà! Bisognava rifare completamente il palazzo e i suoi arredi. Avete capito adesso in quali guai vennero a trovarsi i poveri sudditi? Non credo. Infatti voi certamente penserete che bastava riprendere tutte le misure e apportare le modifiche necessarie. Ma questo non era più possibile, perché il buon **metro** non c'era più. Tutti gli strumenti capaci di **misurare** l'altezza (la bassezza) e la larghezza della Regina, visto che l'offendevano, erano stati bruciati. Per meglio comprendere quanto avvenne, vi racconterò qualche episodio che risale a quel periodo.

In tutta questa confusione , la più fortunata era la sarta, la quale, dovendo confezionare gli abiti della Regina, era autorizzata ad appoggiarle la stoffa addosso e velocemente considerare i tagli da effettuare. Dopo qualche incontro la sarta riuscì a cucirle il primo abito a cui dovette attaccare un rigido colletto, come si usavano in quell'epoca, che però giungesse alla sommità della reale testa adornandola e rendendola più imponente.

(SCHEDA 2: LA REGINA E LA SARTA)
(SCHEDA 3: L'ABITO DELLA REGINA-CONTA)
(SCHEDA 4: L'ABITO DELLA REGINACONFRONTA)
(SCHEDA 5: L'ABITO DELLA REGINA-DEDUCI)
(SCHEDA 6: COSTRUIAMO LA SAGOMA DELLA REGINA DI CUORI)

Dopo aver confezionato questo primo abito la sarta era riuscita, pur senza metro, a costruirsi una sagoma della Regina, da usare in seguito come modello. Infatti erano necessari 8 pezzi di stoffa di uguale altezza e uno alto la metà per cucire l'abito della Regina: 2 pezzi uguali per ciascun braccio, 4 pezzi uguali più quello alto la metà per il corpo. Importante fu osservare che l'attaccatura tra il braccio e il corpo era alta la sesta parte di quelle uguali.

La sarta non era l'unica a possedere una sagoma della Regina. Un'altra era nascosta nella stanza del giullare di corte, il quale la utilizzava per il tiro al bersaglio e il suo divertimento più grande era colpire il cerchio rosso disegnato all'altezza del cuore. Sapete non era facile far ridere la Regina e tutto ciò non era divertente per lui. Come il giullare fosse riuscito ad entrare in possesso di tale sagoma non è dato saperlo. Questa però era meno dettagliata della precedente. Infatti essa era costituita da tre pezzi di uguale altezza più due pezzi per le braccia.

(SCHEDA 7: SAGOMA DEL GIULLARE)

Ed ecco un episodio. All'inizio del suo regno la Regina stabilì che:

1) le finestre e i balconi dovevano essere alti quanto lei con il braccio alzato più ancora una volta la lunghezza del braccio;
2) la finestra da cui venivano pronunciati i discorsi doveva essere alta quanto lei con il braccio alzato più ancora tre volte la lunghezza del braccio;
3) il davanzale doveva trovarsi ad un'altezza tale che ella poteva poggiarvi le sue mani (quando doveva dare più forza alle sue parole!).

Incominciamo da queste prime richieste.

Furono chiamati il falegname e il muratore di corte, l'uno per preparare gli infissi in legno e l'altro per creare il vano della finestra. Fatte le richieste, la Regina si allontanò senza dar loro l'opportunità di prendere alcuna misura (con corde, mattoni, nulla!!). I due artigiani andarono via preoccupati e terrorizzati. Come risolvere questo problema?

Trascorse del tempo e nulla ancora era stato fatto per cui le urla della Regina si sentivano in ogni angolo del palazzo. Un giorno il falegname confidò il suo problema alla moglie. Indovinate chi era? Era proprio la sarta   (che fortuna direte voi!). Ella, raggiante, gli disse che aveva la soluzione e gli mostrò la sagoma che aveva nel suo laboratorio di sartoria. Eureka!! Il falegname era salvo.

Il muratore invece era ancora preoccupato e di ciò si accorse il giullare suo amico. Il giullare, con scherzi e giochi, riuscì a far ridere il muratore e a farsi raccontare cosa lo preoccupava. Dopo però era lui quello preoccupato. Confessare o non confessare il suo macabro divertimento? Questo era il dilemma!! Ma l'affetto per l'amico fu più forte e lo condusse nella sua stanza. Qui gli mostrò il suo bersaglio a grandezza naturale. Gioia e tripudio, il muratore capì di essere finalmente salvo. Si mise quindi all'opera e comunicò alla Regina che presto avrebbe potuto dare inizio ai lavori. La Regina gli disse allora che doveva sbrigarsi perché il falegname aveva già cominciato.

Lì per lì il muratore rimase meravigliato. Il falegname aveva già cominciato! E in base a che cosa? Ma non c'era tempo per rispondere a questa domanda, bisognava mettersi all'opera. Il muratore era fiducioso che qualcosa avrebbe fatto, ma non sapeva ancora come. Quella sagoma composta da tre parti di uguale altezza più le braccia gli creava non pochi problemi. Lui con i numeri non era mai andato troppo sue mani senza raccapezzarsi troppo. Aveva la Regina **rotta** in cinque parti, tre per il corpo e due per le braccia. Cosa poteva fare? Ad un certo punto ebbe l'idea di tagliare la parte di braccio che era in più rispetto agli altri pezzi. Chiese al giullare il permesso per farlo. Il giullare, secondo voi, cosa rispose? Secondo me con sadico piacere gli disse di si (in fondo era solo una bambola di cartone).

(SCHEDA 8 :...O DEI ROTTI)

Il muratore faticosamente riuscì a capire che erano necessari 15 pezzi di altezza uguale a quello che aveva tagliato per ottenere la risposta alla prima richiesta. Ma può mai il muratore dire alla Regina che l'altezza necessaria è data da quindici volte un certo **rotto**? Non può tradire il giullare. Qui ci vuole l'aiuto di qualcuno.

Nella biblioteca del palazzo viveva un vecchio matematico-astronomo, esperto di numeri e di stelle (più di numeri che di stelle, tanto le sue profezie dovevano essere sempre radiose!). Il muratore gli pose il suo problema ed il matematico così rispose: "Caro Sig.Mattone è tempo ormai di aggiornare le nostre conoscenze. Non abbiamo più un metro in questo paese e dobbiamo organizzarci. Sia la Regina la nostra unità di misura e da ciò che vedo lei è interessato a questo pezzetto. Ebbene, non bastano addizioni e sottrazioni, provi un po' a ricordare le divisioni e si accorgerà che questa è ciò che si ottiene dividendo l'altezza della regina in nove parti uguali. Quindi se per noi la Regina è l'unità , inventiamo il nome **un nono** e il simbolo $\frac{1}{9}$ per questa parte e con essa misuriamo. La Regina con il braccio alzato misura 11 volte $\frac{1}{9}$. E adesso per favore mi lasci ai miei studi".

Ma il muratore uscì e di lì a poco giunse il falegname. Analogo problema. Ma il pezzo rotto che lui portò era quello più piccolo e questo, sappiamo bene, è la ventisettesima parte dell'altezza totale e il falegname aveva scoperto che erano necessari 27 di questi più altri 6 per ottenere l'altezza della Regina con il braccio alzato. Ma come esprimersi senza svelare lo stratagemma segreto?

Allora il matematico rispose: "Sia **un ventisettesimo** il nome per questo pezzo e $\frac{1}{27}$ il simbolo per indicarlo, allora la Regina con il braccio alzato è 33 volte $\frac{1}{27}$. Bravo Sig. Legno, lei ha trovato un'altra unità di misura, complimenti, complimenti. Ma ora, per favore, lasciatemi lavorare".

Il Sig. Legno rimase un po' stupito da queste ultime parole, per lui veramente incomprensibili, ma andò via contento.

(SCHEDA 9: I CONTI DEL FALEGNAME)
(SCHEDA 10: I CONTI DEL MURATORE)

Il giorno dopo si ritrovarono il Sig.Mattone e il Sig.Legno alla presenza della Regina pronti a mostrare i loro calcoli.

La Regina: "Sig.Mattone, prego, esponga".

Sig.Mattone: "Ebbene mia Regina prima di tutto ho calcolato che il punto raggiunto dalle Sue graziose dita quando il Suo braccio è alzato si trova ad 11 volte $\frac{1}{9}$ da terra".

La Regina (che di matematica non capiva nulla) : "Bene, bene. E lei Sig.Legno, dica, esponga".

Sig.Legno: "Ebbene mia Regina, i miei calcoli mi portano ad affermare che il punto di cui parla il mio illustre collega è a 33 volte $\frac{1}{27}$ da terra".

Tuoni, fulmini e saette!!!

La Regina: "Qui qualcuno ha sbagliato, e quel qualcuno pagherà con la testa. Secondo il mio illuminante parere, io dico che il muratore ha sbagliato. Io con il braccio alzato raggiungo certamente il punto 33 volte $\frac{1}{27}$ (33 è più grande di 11, questo lo sa anche la Regina, ma basta ciò a renderla più alta?)".

I due artigiani si guardarono sgomenti. Anche se avevano raggiunto i loro risultati con l'aiuto della sega e con calcoli un po' rudimentali, entrambi erano sicuri di aver ragionato bene. Cosa fare? La testa del muratore stava per saltare. Bisognava prendere tempo! Chiesero allora alla Regina di essere sottoposti ad una prova decisiva: entrambi avrebbero eseguito il lavoro secondo ciascuno i propri calcoli e poi la Regina, unico possibile arbitro della situazione, avrebbe emesso il verdetto.

(SCHEDA 11: PROVA DEL GIUDIZIO - FALEGNAME)
(SCHEDA 12: PROVA DEL GIUDIZIO - MURATORE)

Si ritrovarono il giorno successivo nella sala del Giudizio: il muratore aveva costruito un muro con

1

già esistenti), mentre il falegname portò l'infisso alto 45 volte $\frac{1}{27}$ della Regina. Quale non fu la meraviglia: **le due altezze coincidevano**!!!

Bisognava approfondire la questione. A questo punto decisero di cominciare a confrontare tutti i risultati ottenuti in risposta alle richieste della Regina, ve li ricordate?

	Muratore	Falegname
Risposta 1	15 volte $\frac{1}{9}$	45 volte $\frac{1}{27}$
Risposta 2	23 volte $\frac{1}{9}$	69 volte $\frac{1}{27}$
Risposta 3	4 volte $\frac{1}{9}$	12 volte $\frac{1}{27}$

Questi poveri artigiani, abituati ad armeggiare con le proprie mani con martelli, chiodi, calce e mattoni per creare i loro manufatti, stavano con le braccia lungo il corpo, le mani ferme, gli occhi che roteavano da un numero all'altro e il fumo che usciva dalle orecchie**.** Decisero di mandare a chiamare il matematico-astronomo di corte il quale malvolentieri lasciava i suoi libri ed i suoi calcoli. Ad egli fu chiesto di sciogliere il dilemma. Il Sig.Razionale, questo era il suo nome, non ebbe difficoltà a risolvere il problema.

Sig.Razionale: "Non solo abbiamo dimenticato le divisioni ma anche le moltiplicazioni. Non vi ricordate che 3 volte 2, per esempio, vuol dire fare 2+2+2 cioè 2×3? E allora cominciamo a scrivere in modo più matematico questi risultati". Scrisse allora su una lavagna:

$$15 \text{ volte } \frac{1}{9} = \frac{1}{9}\times 15 = \frac{15}{9}$$

e riportò i risultati esibiti dagli artigiani nella tabella che segue.
(Riporta tu i risultati)

	Muratore	Falegname
Risposta 1		
Risposta 2		
Risposta 3		

Il Sig.Razionale continuò poi dicendo: "Vedete bene, cari signori, che ogni risultato contiene due numeri separati da una linea. Tutto ciò vorrà pur dir qualcosa!!! Ebbene, fate attenzione, perché cercherò di far capire a tutti voi la questione in modo che voi possiate poi spiegare a quelli che oggi non sono qui la stessa cosa".

Intanto pensava: "E speriamo che così non mi disturbino più".

Poi riprende: "Prendiamo il primo risultato "quindici noni", $\frac{15}{9}$, e incominciamo ad osservare che 15 lo leggiamo esattamente come se stesse da solo, "quindici", mentre 9 lo leggiamo "noni". Non lo leggiamo "nove". Perché questa differenza? Perché 15 esprime un vero e proprio numero, conta quante parti sono state prese mentre 9 serve a dare un nome, a chiamare, a specificare quale parte si sta utilizzando. Vi ricordate caro Sig.Legno che già parlammo di dare un nome a quel "rotto" e che lo chiamammo "un nono"? Allora, il numero posto sotto la linea è un nome e come tale, vedete, ha sia il singolare che il plurale.

Quindi, anche se ciò può sembrarvi un eccesso di pignoleria, propongo di dare a $\frac{15}{9}$ il nome di **frazione** perché per ottenerlo dobbiamo prima frazionare (rompere) in parti uguali l'intero di cui ci serviamo, di chiamare **denominatore** il numero posto al di sotto della linea perché serve a dare un nome (de-nominare) alla parte che si ottiene "rompendo", mentre quello posto al di sopra, dal momento che è un numero, lo chiamiamo **numeratore**. Le frazioni con numeratore uguale ad 1 le chiamiamo **unità frazionarie**. Un ultimo consiglio, fate attenzione al denominatore e ripetete sempre a voi stessi: ATTENZIONE AL DE-NO-MI-NA-TO-RE".

Detto ciò, il Sig.Razionale chiese ai due artigiani di tirare fuori quei pezzi rotti (chissà da che cosa!) che gli avevano mostrato durante la loro visita. Fortunatamente, nel frattempo, essi avevano sostituito quei pezzi presi dalle sagome con tanti altri di uguale altezza. Il Sig.Razionale confrontò quello chiamato

$\frac{1}{9}$ con quello chiamato $\frac{1}{27}$ e mostrò a tutti che erano necessari 3 pezzi chiamati $\frac{1}{27}$ per ottenere l'altezza di quello chiamato $\frac{1}{9}$ e scrisse di nuovo alla lavagna:

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{27} \times 3 = \frac{3}{27}$$

quindi

$$\frac{1}{9} = \frac{3}{27}$$

Aggiunse che questo voleva dire che le frazioni erano **equivalenti,** un po' come lo erano (se lo ricordavano ancora?) 1m., cioè 1 metro, e 100cm., cioè 100 centimetri. Finalmente chiarezza fu fatta. A questo punto era chiaro a molti che se ad ogni parte uguale a $\frac{1}{9}$ si sostituivano 3 pezzi uguali ad $\frac{1}{27}$ si ottenevano i risultati che il matematico stava scrivendo alla lavagna:

$$\frac{15}{9} = \frac{1}{9} \times 15 = \frac{3}{27} \times 15 = \frac{45}{27}$$

Il falegname capì subito la questione e, tirando fuori le sue assi alte $\frac{1}{27}$, mostrò praticamente alla Regina il risultato. Per essere sicuro di aver capito, volle provare da solo che anche gli altri risultati erano frazioni equivalenti.

(SCHEDA 13: I RISULTATI COINCIDONO)

Il muratore tirò un sospiro di sollievo, la sua testa rimaneva attaccata al suo collo. Finalmente si potè dare inizio ai lavori di rinnovamento dell'intero edificio e degli arredi.

Purtroppo venne modificata anche l'altezza delle porte, dell'ingresso reale, dei tavoli, delle sedie, degli specchi, delle mensole, ecc.ecc.. Riuscite ad immaginare quello che successe in seguito? No? E allora cercherò, con l'aiuto della vostra fantasia, di darvi una idea di quanto accadde.

Le teste di quei poveri domestici, costretti a vivere nel palazzo giorno e notte, e quelle dei ministri, che quotidianamente andavano in udienza dalla Regina, erano diventate simili a dei cavolfiori tali e tanti erano i bernoccoli di cui si riempirono.

Dopo un po' fu trovato uno stratagemma. Si costruirono dei carrelli, di diverse altezze, con quattro ruote e un appoggio anteriore (immaginate degli skate-board a quattro ruote) sui quali inginocchiarsi (non salirci con i piedi!) e con essi spostarsi nel palazzo. Quindi con un po' di pazienza tutti si abituarono a questi nuovi mezzi di trasporto (interni).

Alcuni di questi furono messi fuori dall'ingresso reale accanto ad una statua a grandezza naturale della Regina. Perché quella statua? Per salutare chi giungeva al palazzo? Oppure per scegliere il carrello giusto che consentiva di diventare più bassi della statua (cioè della Regina!)? Purtroppo era questo il motivo e fu una fortuna che la Regina avesse accettato di far erigere quella statua in suo onore.

Ma i malcapitati viandanti, che nulla sapevano di tutto ciò, andavano incontro puntualmente ad una di queste situazioni:

1) se erano alti quanto la Regina o più bassi, non avevano nulla da temere;
2) se riuscivano a passare sotto la porta ma erano più alti della Regina la sentivano gridare: "Tagliategli la testaaa...";
3) se sbattevano la testa nell'entrare, venivano subito soccorsi e ricevevano le istruzioni per entrare.

Se invece, conoscendo di fama la Regina, chiedevano informazioni oppure si accorgevano della statua, dei carrellini, e capivano il consiglio non scritto "Prova, o straniero che qui sei giunto o tu che comunque devi entrare, con quale di questi più basso sarai di colei che qui non è per salutarti", o si inginocchiavano o voltavano immediatamente le spalle e non rischiavano la testa.

(SCHEDA 14: $\frac{1}{9}$ E $\frac{1}{27}$ NON BASTANO PIU')
(SCHEDA 15: CAMBIAMO STOFFA)
(SCHEDA 16: TROVIAMO NUOVE UNITA' DI MISURA)
(SCHEDA 17: PROVA ADESSO TU)
(SCHEDA 18: TROVA TU LA REGOLA)

SCHEDA 1: FACCIAMO CONOSCENZA CON LA REGINA DI CUORI

SCHEDA 2 : LA REGINA DI CUORI E LA SARTA

Segui le istruzioni e colora il vestito della Regina.

- La stoffa utilizzata dietro la testa fino alla linea sotto il mento è di colore giallo;

- La stoffa che va dalla linea sotto il mento fino alla vita è di colore rosso;

- La stoffa che costituisce la prima balza, dalla vita alle ginocchia, è di colore blu;

- La stoffa che costituisce la seconda balza, all'altezza delle ginocchia, è di colore verde;

- La stoffa che costituisce la terza balza, da sotto le ginocchia ai piedi, è di colore rosa;

- La stoffa che ricopre le braccia (e per errore anche le mani), è di colore viola.

SCHEDA 3 : L'ABITO DELLA REGINA-CONTA

Osservando attentamente il disegno della Regina che hai colorato prova a dire:

- di quante strisce alte 1 quadratino è composta la parte gialla?
- di quante strisce alte 1 quadratino è composta la parte rossa?
- di quante strisce alte 1 quadratino è composta la parte blu?
- di quante strisce alte 1 quadratino è composta la parte verde?
- di quante strisce alte 1 quadratino è composta la parte rosa?
- di quante strisce alte 1 quadratino è composta la parte viola?
- su quante strisce alte 1 quadratino compare sia il colore viola che quello giallo ?

SCHEDA 4: L'ABITO DELLA REGINA-CONFRONTA

In base ai risultati ottenuti sapresti dire:

- quante volte la parte rossa è più alta della parte verde?
- quante volte la parte rosa è più alta della striscia su cui compare sia il colore viola che quello giallo?
- quante volte la parte viola è più alta della parte blu?
- quali sono le parti di uguale altezza ? Elencale

SCHEDA 5: L’ABITO DELLA REGINA-DEDUCI

Osservando il disegno della Regina , che ormai non ha più segreti per te, sapresti dire:

- quante strisce alte quanto 1 quadratino sono necessarie per ottenere l’altezza totale della Regina ?

- quante strisce alte quanto 3 quadratini sono necessarie per ottenere l’altezza totale della Regina?

- è possibile dividere l’altezza totale della Regina in strisce alte 6 quadratini?

- quante strisce alte quanto 9 quadratini sono necessarie per ottenere l’altezza totale della Regina ?

SCHEDA 6: LA SAGOMA DELLA REGINA DI CUORI

Riguarda le schede 2,3,4,5 e prova anche tu a costruire una sagoma della Regina di Cuori. Ti consiglio di utilizzare un foglio di carta con i quadretti alti 1cm. e dei fermacampione (ti ricordo, anche se non ne hai bisogno, che la parte in cui il braccio si attacca al corpo è alta 1 quadretto, mentre la mano, se osservi, occupa una striscia alta 2 quadretti).

SCHEDA 7: LA SAGOMA DEL GIULLARE

In base ai dati finora raccolti, sai dire se è possibile che il giullare sia in possesso di una sagoma divisa in tre parti di uguale altezza ?

Se la risposta è affermativa, colora le tre parti dell’abito della Regina, a partire dal colletto rigido dietro la testa, utilizzando tre colori diversi (per le maniche, scegli tu lunghezza e colore).

SCHEDA 8: ...O DEI ROTTI

Fai anche tu quello che hanno fatto il falegname e il muratore. Taglia la striscia su cui compare sia il colore viola che quello giallo, come ha fatto il falegname. Poi ritaglia un braccio e una delle parti in cui è diviso il corpo della Regina secondo la sagoma del giullare e come lui confronta i due pezzi così ottenuti e taglia la parte di braccio che è in più. Per quanto riguarda la parte in possesso del falegname non ci sono problemi, nelle schede precedenti hai tutte le risposte che ti servono. Per quanto riguarda la parte in possesso del giullare , sai dire:

- da quante strisce alte 1 quadratino è composta la parte tagliata?

- quante di queste parti sono necessarie per ottenere l'altezza totale della Regina ?

(Suggerimento : la risposta già si trova nella scheda 5)

- quante volte il braccio è più alto della parte rotta ?

- se le finestre devono essere alte quanto la Regina con il braccio alzato più ancora una volta il braccio, quante di queste parti occorrono per ottenere questa altezza

SCHEDA 9: I CONTI DEL FALEGNAME

Determina le altezze richieste dalla Regina di Cuori utilizzando come unità di misura $\frac{1}{27}$:

1) le finestre e i balconi dovevano essere alti quanto lei con il braccio alzato più ancora una volta la lunghezza del braccio;

2) la finestra da cui venivano pronunciati i discorsi doveva essere alta quanto lei con il braccio alzato più ancora tre volte la lunghezza del braccio;

3) il davanzale doveva trovarsi ad un'altezza tale che ella poteva poggiarvi le sue mani.

SCHEDA 10: I CONTI DEL MURATORE

Determina le altezze richieste dalla Regina di Cuori utilizzando come unità di misura $\frac{1}{9}$:

1) le finestre e i balconi dovevano essere alti quanto lei con il braccio alzato più ancora una volta la lunghezza del braccio;

2) la finestra da cui venivano pronunciati i discorsi doveva essere alta quanto lei con il braccio alzato più ancora tre volte la lunghezza del braccio;

3) il davanzale doveva trovarsi ad un'altezza tale che ella poteva poggiarvi le sue mani.

SCHEDA 11: PROVA DEL GIUDIZIO -FALEGNAME

Fai finta di essere il falegname e disegna un balcone alto 45 volte $\frac{1}{27}$ della Regina.

SCHEDA 12: PROVA DEL GIUDIZIO - MURATORE

Fai finta di essere il muratore e costruisci un vano alto 15 volte $\frac{1}{9}$ della Regina.

SCHEDA 13 : I RISULTATI COINCIDONO

Fai come il falegname e prova a vedere che $\frac{23}{9}$ e $\frac{69}{27}$, $\frac{4}{9}$ e $\frac{12}{27}$ sono frazioni equivalenti.

SCHEDA 14: $\frac{1}{9}$ E $\frac{1}{27}$ NON BASTANO PIÙ

Di lì a poco $\frac{1}{9}$ e $\frac{1}{27}$ non bastarono più, fu necessario usare anche la frazione $\frac{1}{3}$.

a) Sai indicare almeno una delle parti alte $\frac{1}{3}$ della Regina?

(Ti serve un aiuto? Guarda la scheda 7)

b) Sai dire quante strisce alte $\frac{1}{9}$ sono necessarie per ottenere quella alta $\frac{1}{3}$?

c) Sai dire quante strisce alte $\frac{1}{27}$ sono necessarie per ottenere quella alta $\frac{1}{3}$?

d) Utilizzando i risultati ottenuti completa le seguenti uguaglianze:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{9} \times \ldots\ldots = \frac{\quad}{9}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{27} \times \ldots\ldots = \frac{\quad}{27}$$

e) Se l'altezza della Regina è divisa in 27 parti uguali, è possibile determinare una parte alta $\frac{1}{2}$

SCHEDA 15 : CAMBIAMO STOFFA

Prendi la sagoma della Regina da te costruita utilizzando il foglio con i quadretti alti 1cm.. Supponi di doverle cucire un vestito utilizzando una stoffa a quadretti alti la metà dei precedenti, cioè mezzo centimetro (come quelli dei quaderni).

a) Quanti quadretti deve essere alta la stoffa per ottenere l'altezza totale della Regina?

b) Una striscia alta 1 quadratino quale frazione dell'altezza della Regina rappresenta?

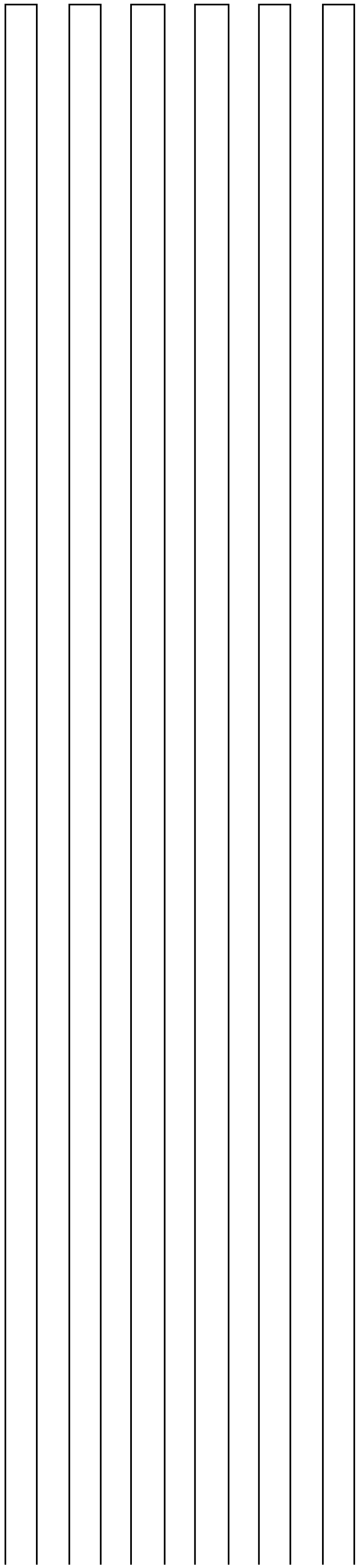
c) Sai confrontare le parti alte $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$ con questa che ora hai ottenuto?

$$\frac{1}{3} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$\frac{1}{9} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$\frac{1}{27} = \frac{\quad}{\quad}$$

d) Puoi determinare una parte alta $\frac{1}{2}$?



SCHEDA 16: TROVIAMO NUOVE UNITA' DI MISURA

Gli artigiani decisero che non era più il caso di spostarsi portando sempre con loro la sagoma della Regina, ma che bastava avere un'asta, di altezza uguale a quella della Regina, opportunamente divisa in parti uguali. Ne abbiamo qui disegnato alcune. Determina nell'ordine le seguenti parti: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{27}$.

SCHEDA 17: PROVA ADESSO TU

a) Fai come il falegname e prova da solo che le seguenti frazioni sono equivalenti:

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8},\quad \frac{7}{5}=\frac{28}{20},\quad \frac{2}{3}=\frac{6}{9},\quad \frac{1}{2}=\frac{6}{12},\quad \frac{3}{5}=$$

b) Inserisci il dato mancante:

$\boxed{X}$ è equivalente a $\frac{}{6}$

$\frac{3}{5}$ è equivalente a $\frac{}{20}$

$\frac{2}{3}$ è equivalente a $\frac{}{24}$

SCHEDA 18: TROVA TU LA REGOLA

Descrivi con parole tue come puoi ottenere una frazione equivalente ad una frazione data.

SCHEDA : L'AZZARDO

Vediamo un po' quanta strada sai fare con quello che fino ad ora hai capito. E' una strada che va oltre i tuoi confini, per cui potresti anche non riuscire a percorrerla o non volere. Ti scrivo alcune relazioni a te ben note, dopo, se vuoi, puoi provare a completare quelle restanti:

1m.+1dam.=1m.+10m.=11m.

oppure

1m.+1dam.=0,1dam.+1dam.=1,1dam.

Equivalentemente

5m.+ 2dam.= 5m.+ 20m.=25m.

oppure

5m.+ 2dam.=0,5dam.+2dam.=2,5dam.

Fino a qui nulla di nuovo, a te le prossime mosse:

$$\boxed{X}\ \frac{1}{27}+\frac{1}{9}=$$

$$\frac{5}{27}+\frac{2}{9}=$$